Digitale Bibliothek Braunschweig

Über die von vier Moduln erzeugte Dualgruppe

Herrmann, Christian

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982, S.157-159

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052584

Digitale Bibliothek Braunschweig

Über die von vier Moduln erzeugte Dualgruppe

Von **Christian Herrmann**, Darmstadt

Richard Dedekind hat in [2] unter der Bezeichnung „Dualgruppe“ den Verbandsbegriff als Grundlage für das Rechnen mit Untermoduln eingeführt. Insbesondere erkannte er die Bedeutung des modularen Gesetzes. In [3] bestimmte er den freien modularen Verband mit drei Erzeugenden. Damit waren zwei für die Verbandstheorie bedeutsame Themen angeschnitten: das Studium der von gegebenen Konfigurationen erzeugten Verbände und die Suche nach einer angemessenen Axiomatisierung.

In diesem Zusammenhang sind offenbar die folgenden Klassen von Verbänden von Belang: Sei R ein Ring mit 1 und V(R) die gleichungsdefinierte Klasse von Verbänden, die von allen Verbänden von Untermoduln unitärer R-Moduln erzeugt wird. $V(\mathbb{Z})$ umfaßt also alle Untergruppenverbände abelscher Gruppen. Die Gültigkeit von Gleichungen in $V(\mathbb{Z})$ ist entscheidbar, also $V(\mathbb{Z})$ rekursiv axiomatisierbar. Auch wird $V(\mathbb{Z})$ von endlichen Verbänden erzeugt [13].

Für beliebige Ringe R läßt sich die Gültigkeit von Gleichungen in V(R) zu Teilbarkeitsbedingungen $p^{k+1}|p^k$ für R in Beziehung setzen [16]. Jedes V(R) ist von endlichdimensionalen Verbänden erzeugt. Andererseits ist kein V(R) endlich axiomatisierbar [14]. Es gilt sogar, daß keine endlich axiomatisierbare gleichungsdefinierte Klasse modularer Verbände, die $V(\mathbb{Q})$ enthält, von endlichdimensionalen Verbänden erzeugt wird [12].

Eine befriedigende Axiomatisierung der Verbände von Untermoduln ist demnach nicht möglich. Dennoch reicht das modulare Gesetz zur Behandlung vieler Fragen aus. Dies gilt auch für die Untersuchung freier Verbände über kleinen oder sehr starken Relationen unterworfenen Erzeugendensystemen. Neben Dedekinds Pionierwerk [3] sind hier insbesondere die Ereignisse von Wille [18] und Gross [6] zu nennen. Letztere entstanden als Hilfsmittel für die Theorie unendlichdimensionaler quadratischer Räume.

Andererseits lassen sich leicht modulare Verbände konstruieren [8], die aus der Sichtweite der Untermodulverbände nur pathologisch genannt werden können. Freese [4] bemerkte, daß dabei schon fünf Erzeugende ausreichen und benutzte dies, um die Unentscheidbarkeit von Gleichungen in fünf Variablen für die Klasse der modularen Verbände zu zeigen.

Der Fall von vier Erzeugenden läßt sich zunächst für modulare Verbände ganz allgemein angehen. Es seien M_4 und R_∞ die in Figur 1 angegebenen Verbände und S_n das Intervall $[e_n,1]$ von R_∞.

Satz 1 [9]. Jeder von Elementen a,b,c,d mit $a+b=c+d$ und $ab=cd$ erzeugte modulare Verband ist subdirektes Produkt der Verbände M_4, S_n, R_∞ und dessen Dual R_∞^δ.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052584

Digitale Bibliothek Braunschweig

Dieser Satz kann benutzt werden, um Baers [1] Verfeinerungssatz für direkte Zerlegungen von Gruppen in eine verbandstheoretische Version zu übertragen [7]. Um die Rolle von Satz 1 für das Studium beliebiger von vier Elementen erzeugter Verbände deutlich zu machen, benötigen wir die folgenden Verbandsterme:

$$q_1 = (a+b)(c+d),\quad q_2 = (a+c)(b+d),\quad q_3 = (a+d)(b+c)$$
$$s_1 = a+b+c+d \text{ und induktiv } s_{n+1} = \textstyle\sum_i s_n(q_i a, \ldots, q_i d).$$

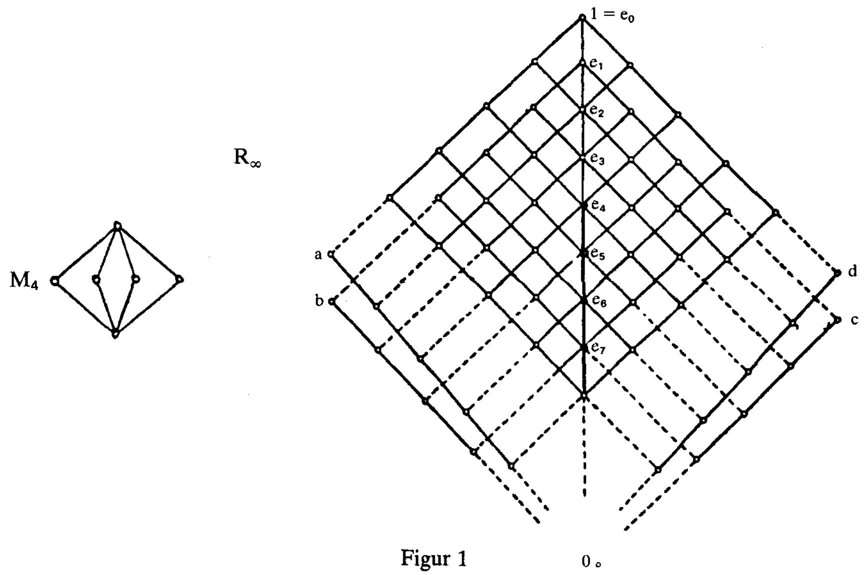
Die s_n^δ seien dual definiert. Es gilt $s_m^\delta \leqq s_{m+1}^\delta \leqq s_{n+1} \leqq s_n$.

Satz 2 [10]. Sei M ein subdirekt irreduzibler modularer Verband mit Erzeugenden a,b,c,d und zu keinem der Verbände aus Satz 1 isomorph. Dann gibt es ein n so, daß $s_n(a,b,c,d) = 0$ oder $s_n^\delta(a,b,c,d) = 1$ gilt.

Umgekehrt gilt in den Verbänden aus Satz 1 $s_n = 1$ und $s_n^\delta = 0$ für alle n. Satz 2 schöpft die durch Diagramme darstellbaren subdirekt irreduziblen modularen Verbände mit vier Erzeugenden aus. Es gibt jedoch weit mehr Verbände, die nicht gezeichnet werden können.

Satz 3 [11]. Jeder von einem Rahmen erzeugte modulare Verband wird auch von vier Elementen erzeugt.

Dabei ist ein Rahmen der Ordnung n im Sinne von v. Neumann [17] die verbandstheoretische Abstraktion eines Koordinatensystems einer n-1-dimensionalen projektiven Geometrie. Die Erzeugenden können in Analogie zu unzerlegbaren Quadrupeln von Unterräumen eines Vektorraumes nach Gel'fand und Ponomarev [5] gewählt werden. Die von einem Rahmen der Ordnung $n \geqq 4$ erzeugten modularen Verbände (bzw. $n \geqq 3$ für $V(\mathbb{Z})$) lassen sich genau bestimmen [12].



Figur 1

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052584

Digitale Bibliothek Braunschweig

Satz 4 [11]. Ist R ein Körper, so sind die von vier Elementen erzeugten Verbände in V(R) gerade die Verbände aus Satz 1 und die projektiven Geometrien von Dimension $n \geqq 2$ über dem Primkörper von R. Für V(R) ist das Wortproblem in vier Erzeugenden lösbar.

In $V(\mathbb{Z})$ gibt es jedoch subdirekt irreduzible, die weder unter Satz 1 noch unter Satz 3 fallen. Es ist jedoch zu vermuten, daß alle diese Verbände effektiv als Verbände von Untergruppen abelscher Gruppen konstruiert werden können, und daß für $V(\mathbb{Z})$ das Wortproblem in vier Erzeugenden ebenfalls lösbar ist. Demgegenüber enthält nach Hutchinson [15] jede ein V(R) umfassende gleichungsdefinierte Klasse modularer Verbände einen endlich präsentierten Verband mit fünf Erzeugenden, der ein unlösbares Wortproblem hat.

Literatur

[1] R. Baer, Direct decompositions. Trans. Amer. Math. Soc. 61 (1947) 62–98.
[2] R. Dedekind, Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler. Festschrift der TH Braunschweig bei Gelegenheit der 69. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte, 1897, S. 1–40.
[3] R. Dedekind, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Math. Ann. 53 (1900), 236–271.
[4] R. Freese, Free modular lattices. Trans. Amer. Math. Soc. 261 (1980), 81–91.
[5] I. M. Gel'fand und V. A. Ponomarev, Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space. Coll. Math. J. Bolyai 5 (1970), 1–56.
[6] H. Gross, Quadratic forms in infinite dimensional vector spaces. Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Stuttgart 1979.
[7] H. P. Gumm und C. Herrmann, Algebras in modular varieties: Baer refinements, cancellation and isotopy. Houston J. Math. 5 (1979), 503–523.
[8] M. Hall und R. P. Dilworth, The imbedding problem for modular lattices. Ann. Math. 45 (1944), 450–456.
[9] C. Herrmann, On modular lattices generated by two complemented pairs. Houston J. Math. 2 (1976), 513–523.
[10] C. Herrmann, A parameter for subdirectly irreducible modular lattices with four generators. Acta Sci. Math. 43 (1981), 169–179.
[11] C. Herrmann, Rahmen und erzeugende Quadrupel in modularen Verbänden. In print, Algebra Universalis 1981.
[12] C. Herrmann, On the arithmetic of projective coordinate systems. Preprint Lakehead 1981.
[13] C. Herrmann und A. P. Huhn, Zum Wortproblem für freie Untermodulverbände. Arch. Math. 26 (1975), 449–453.
[14] C. Herrmann und W. Poguntke, The class of sublattices of normal subgroup lattices is not elementary. Algebra Universalis 4 (1974), 280–286.
[15] G. Hutchinson, Embedding and unsolvability theorems for modular lattices. Algebra Universalis 7 (1977), 47–84.
[16] G. Hutchinson und G. Czédli, A test for identities satisfied in lattices of submodules. Algebra Universalis 8 (1978), 269–309.
[17] J. v. Neumann, Continuous Geometry. Princeton 1960.
[18] R. Wille, Über modulare Verbände, die von einer endlichen halbgeordneten Menge frei erzeugt werden. Math. Z. 131 (1973), 241–249.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052584